



UNIVERSIDAD DE ATACAMA

FACULTAD DE INGENIERÍA / DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA RECUPERATIVA N°1

Profesor: Hugo S. Salinas.

Segundo Semestre 2009

DESARROLLO

1. Se tienen dos bolsas A y B , cada una contiene 25 fichas (en miles de pesos). Se tiene la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

	Bolsa A	Bolsa B
Valor	Cantidad de fichas	Cantidad de fichas
0	1	8
5	1	6
10	2	4
15	3	3
20	4	2
25	6	1
30	8	1

Supongamos que te muestran una de las bolsas. Tú tienes que decidir si la bolsa que te muestran es la bolsa A . Tú puedes sacar una ficha y luego tomar la decisión.

- a) Escribir las dos hipótesis del test.

Solución

Según el enunciado las hipótesis adecuadas son:

H_0 : La ficha proviene de la bolsa A , H_1 : La ficha proviene de la bolsa B

(4 ptos.)

- b) ¿Cuál es la dirección del extremo? Justificar.

Solución

Según la definición, la dirección del extremo corresponde a la posición de los valores que son más probables bajo H_1 , según la tabla anterior, es hacia la izquierda.

(4 ptos.)

- c) Escribir una regla de decisión tal que el error tipo I sea cercano pero no mayor al 10 %.

Solución

La probabilidad de cometer el error tipo I (nivel de significancia) debe ser cercano pero no mayor a 0.1, es decir:

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta}) < 0.1$$

Según la tabla, la regla de decisión debe ser: Rechazar la bolsa A si la ficha extraída (observada) es menor de \$10000. (5 ptos.)

- d) Calcular el nivel de significación para la regla de decisión dada en c).

Solución

Según lo anterior, el nivel de significación está dado por:

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta}) = \frac{2}{25} = 0.08$$

(4 ptos.)

- e) Supongamos que tú sacas una ficha de \$5000.

- i. ¿Cuál es el valor- p ?

Solución

Según la definición, el valor- p es la probabilidad, calculada bajo el supuesto que H_0 es verdadera, de obtener el valor observado o uno más extremo. Por lo tanto, como el extremo es hacia la izquierda y observas una ficha de \$5000, el valor- p está dado por:

$$\text{valor-}p = \mathbb{P}(\text{extraer una ficha de \$5000 o menos, de la bolsa } A) = \frac{2}{25} = 0.08$$

(4 ptos.)

- ii. ¿Cuál será tu decisión y conclusión según tu regla en c).

Solución

Según la teoría, si el valor- $p \leq \alpha$ entonces rechazamos H_0 . Por lo tanto, hay evidencia suficiente para rechazar que la ficha observada haya sido extraída de la bolsa A .

(4 ptos.)

2. Se tienen 5 aspirantes (Juan, Diego, María, Susana y Paula) para dos trabajos idénticos. Un supervisor selecciona dos aspirantes para ocupar esos puestos.

- a) Hacer un lista de los modos posibles en que se pueden ocupar los puestos. Es decir, hacer una lista de todas las selecciones posibles de dos de los cinco aspirantes.

Solución

Se trata de seleccionar a dos personas (el orden no importa) de un total de 5. Es decir, hay $\binom{5}{2} = 10$ parejas distintas:

$$\Omega = \{JD, JM, JS, JP, DM, DS, DP, MS, MP, SP\}$$

donde J : Juan, D : Diego, M : María, S : Susana y P : Paula. (4 ptos.)

- b) Sea A el conjunto de selecciones que contienen por lo menos un hombre. ¿Cuántos elementos tiene A ?

Solución

El conjunto que posee uno o dos hombres contiene 7 elementos y está dado por:

$$A = \{JD, JM, JS, JP, DM, DS, DP\}$$

(3 ptos.)

- c) Sea B el conjunto de selecciones que contienen exactamente un hombre. ¿Cuántos elementos tiene B ?

Solución

El conjunto que contiene exactamente un hombre contiene 6 elementos y está dado por:

$$B = \{JM, JS, JP, DM, DS, DP\}$$

(3 ptos.)

- d) Escribir el conjunto que contiene dos mujeres, en términos de los conjuntos A y B .

Solución

El conjunto que tiene dos mujeres es $\{MS, MP, SP\} = (A \cup B)' = A' \cap B'$

(3 ptos.)

- e) Hacer una lista de los elementos en A' , $A \cap B$, $A \cup B$ y $A \cap B'$

Solución

$$A' = \{MS, MP, SP\}$$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$A \cap B' = \{JD\}$$

(12 ptos.)

3. El siguiente circuito trabaja si, y sólo si, existe un camino de dispositivos en funcionamiento de izquierda a derecha. Supongamos que los dispositivos fallan de manera independiente. En la Figura 1 se indica la probabilidad de fallo de cada uno de ellos.

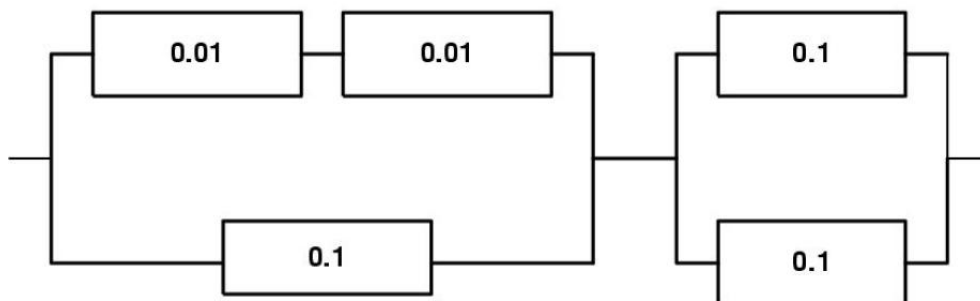


Figura 1: Circuito

- a) Definir adecuadamente los eventos que vas a utilizar para resolver b).

Solución

Sean los eventos según la Figura 2

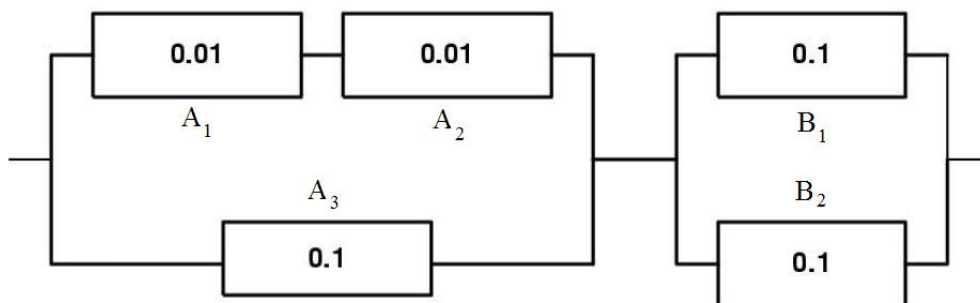


Figura 2: Donde F : el circuito funciona

(5 ptos.)

- b) Calcular la probabilidad de que el circuito funcione.

Solución

Si A_1 y A_2 o A_3 funcionan, el lado izquierdo del circuito funciona. El circuito del lado derecho funciona si funcionan B_1 o B_2 . De acuerdo a esto, el circuito completo funciona con probabilidad:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cup A_3)\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) \quad (\text{por independencia}) \\ &= (0.99801)(0.99) = 0.9880299 \approx 0.99\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \quad (\text{por independencia}) \\ &= (0.99)^2 + 0.9 - (0.99)^2(0.9) = 0.99801\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) &= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) \quad (\text{por independencia}) \\ &= 0.9 + 0.9 - (0.9)^2 = 0.99\end{aligned}$$

(20 ptos.)

4. Un Psicólogo elaboró una prueba llamada **Lápiz y Papel** que tiene como finalidad medir el grado de depresión de las personas. Para comparar los resultados de esa prueba con las calificaciones asignadas por expertos, varios individuos *con perturbaciones emocionales* fueron sometidos a ella. Los mismos individuos fueron calificados por dos Psiquiatras A y B , de manera independiente, según el grado de depresión observado por cada uno de ellos en el transcurso de entrevistas detalladas con esos individuos. Los puntajes más altos corresponden a un grado mayor de depresión. Ver Figura 4.

- a) ¿Cuál es el valor aproximado de las medidas de dispersión del grado de depresión determinada por el Psiquiatra A ?

Solución

La desviación estándar no se puede calcular porque no conocemos los datos. El rango y el rango intercuartil sí se pueden calcular a partir de la información que se desprende de la Figura 4. En efecto, el rango $R = \text{Max} - \text{Min} = 48 - 1 = 47$ y rango intercuartil $RQ = Q_3 - Q_1 = 18 - 5 = 13$.

(3 ptos.)

- b) ¿Qué medida de dispersión usarías para describir mejor la variabilidad de los datos del Psiquiatra A ? Justificar la respuesta.

Solución

Según la Figura 4 la distribución del grado de depresión determinada por el Psiquiatra A es **sesgada a la derecha con valores extremos (outliers)** y por lo tanto la medida de dispersión más adecuada es el rango intercuartil $RQ = Q_3 - Q_1 = 18 - 5 = 13$.

(3 ptos.)

- c) ¿Qué porcentaje de los individuos tienen un grado de depresión mayor a 8 puntos según el Psiquiatra A ?

Solución

La mediana Q_2 está ubicada exactamente en el valor 8, y por definición hay un 50 % de información que supera este valor.

(3 ptos.)

- d) Calcular las medidas de tendencia central y de dispersión del grado de depresión de los individuos calificados por el Psiquiatra B. Usar los siguiente datos:

Resultados Psiquiatra B																							
7	28	3	4	8	18	1	1	9	35	9	6	10	15	2	2	11	42	6	10	12	22	5	3

Solución

Primero ordenamos los datos:

1 1 2 2 3 3 4 5 6 6 7 8 9 9 10 10 11 12 15 18 22 28 35 42

Las medidas de **tendencia central** son:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X_i}{n} = \frac{269}{24} = 11.20833 \approx 11.21 \\ Q_2 &= 8.5\end{aligned}$$

Los datos se pueden considerar sin moda, a pesar que hay varios datos que tienen frecuencia 2.

Las medidas de **dispersión** son:

$$\begin{aligned}R &= Max - Min = 42 - 1 = 41 \\ RQ &= Q_3 - Q_1 = 13.5 - 3.5 = 10 \\ S^2 &= \frac{n}{n-1} [\overline{X^2} - \bar{X}^2] = \frac{24}{23} [236.9583 - (11.20833)^2] = 116.1721 \iff S = \sqrt{116.1721}\end{aligned}$$

Por lo tanto $S = 10.78$

(12 ptos.)

- e) Dibujar un diagrama de cajas para los resultados del Psiquiatra B. Comentar el resultado acerca de la distribución.

Solución

Primero calculamos los límites admisibles del boxplot. Es decir:

$$LI = Q_1 - (1.5) \times (Q_3 - Q_1) = 3.5 - (1.5) \times 10 = -11.5$$

$$LS = Q_3 + (1.5) \times (Q_3 - Q_1) = 13.5 + (1.5) \times 10 = 28.5$$

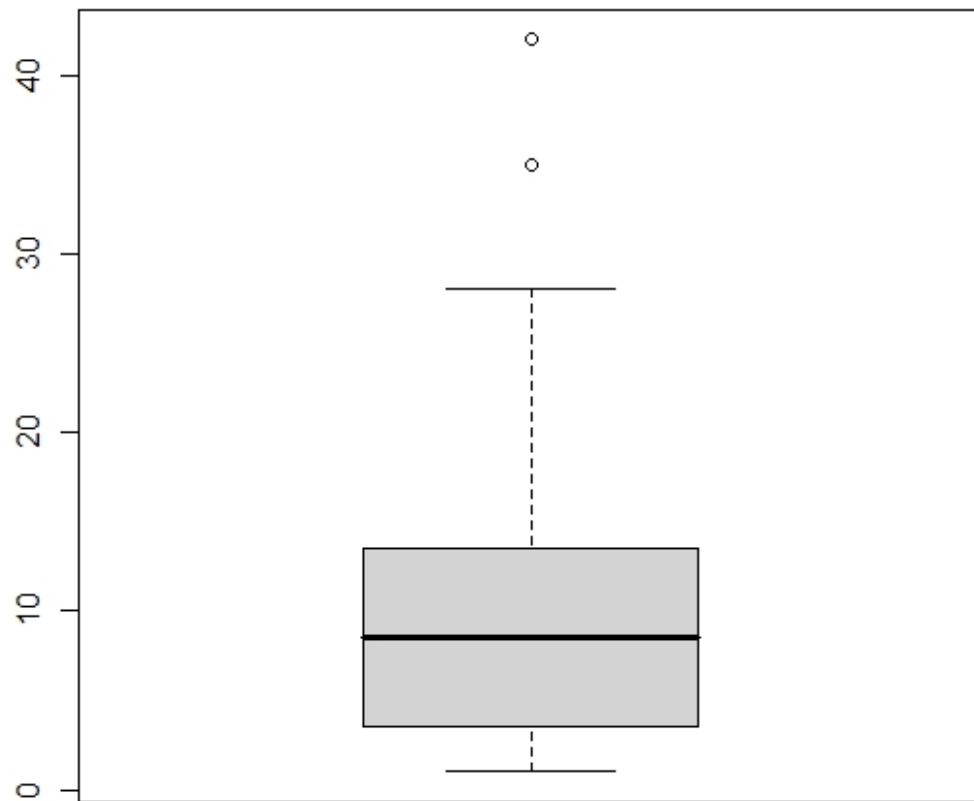


Figura 3: Diagrama de caja de los resultados de la prueba **Lápiz y Papel** del Psiquiatra B

Según la Figura 3 la distribución del grado de depresión determinada por el Psiquiatra B es **sesgada a la derecha con valores outliers**.

(4 ptos.)

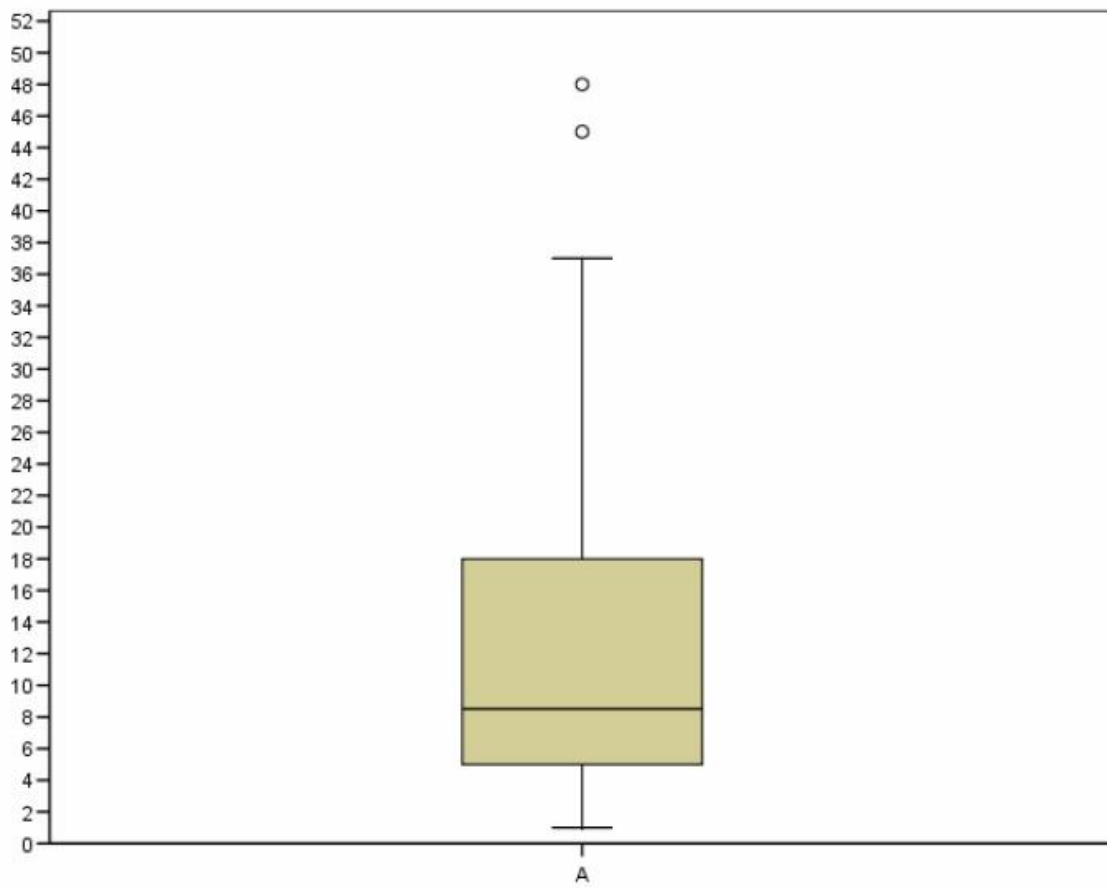


Figura 4: Diagrama de caja de los resultados de la prueba **Lápiz y Papel** del Psiquiatra A